Early Math Initiative

El desarrollo de las habilidades y conceptos aritméticos desde la infancia hasta los primeros años de la escuela

Antes de que los niños ingresen a la escuela, e incluso antes de poder hablar o contar, muestran signos de capacidades aritméticas tempranas. Los bebés prestan atención a las cantidades de cosas y a los cambios en las cantidades. Los niños pequeños notan cuando hay "más" o "menos" de algo y pueden hacer razonamientos sobre las cantidades. A medida que sus habilidades cognitivas y verbales se desarrollan durante los años de preescolar, los niños desarrollan una comprensión de contar y de los números y comienzan a resolver problemas aritméticos simples manipulando objetos. Este desarrollo proporciona un fundamento para las habilidades futuras de adición y sustracción. Desde el kindergarten hasta los primeros años de la escuela, los niños profundizan su comprensión de la suma y la resta y aprenden a resolver problemas aritméticos con más rapidez y precisión.

Aunque los niños pequeños adquieren algunas habilidades aritméticas naturalmente a través de sus interacciones con el mundo a su alrededor, se benefician mucho de una enseñanza de matemáticas de alta calidad antes de ingresar al kindergarten.[1–4] Los niños que ingresan al kindergarten con habilidades matemáticas sólidas demuestran logros mayores en matemáticas y en la lectura al finalizar la escuela primaria que los niños que ingresan al kindergarten con habilidades matemáticas débiles.[5] Sin embargo, una enseñanza de matemáticas de alta calidad en el preescolar no significa usar tarjetas ilustrativas o repetición de memoria. Los niños pequeños aprenden matemáticas mejor a través de una combinación de experiencias diarias basadas en el juego y también con actividades de aprendizaje estructuradas y acordes a la edad.[6,7] Luego del preescolar, las habilidades aritméticas de los niños se apoyan mejor mediante una enseñanza que anime el uso flexible de estrategias de resolución de problemas y que promueva la comprensión de los conceptos aritméticos.

Los niños pequeños aprenden matemáticas mejor a través de una combinación de experiencias diarias basadas en el juego y también con actividades de aprendizaje estructuradas y acordes a la edad.

En este informe

- Un resumen de los hallazgos de la investigación sobre el desarrollo de las habilidades y los conceptos aritméticos desde la infancia hasta los primeros años de la escuela
- Implicaciones prácticas para educadores y cuidadores de niños pequeños desde el nacimiento hasta los ocho años

The California Statewide Early Math Initiative is funded by
the California Department of Education, Early Learning and Care Division and the California State Board of Education.

Este informe presenta un resumen de la investigación sobre el desarrollo de las habilidades aritméticas de los niños junto con implicaciones prácticas relacionadas para que los educadores apoyen el aprendizaje temprano de matemáticas de los niños. Aunque estas estrategias están orientadas a los maestros, muchas de ellas también pueden ser utilizadas por las familias en el entorno del hogar. El enfoque se encuentra en los niños que se desarrollan de manera típica en entornos de cuidado y educación saludables y receptivos. Sin embargo, es importante tener en cuenta que cada niño puede demostrar variabilidad en la velocidad y el curso del aprendizaje aritmético. Algunas de estas diferencias se atribuyen a las diversas habilidades cognitivas generales, como las funciones ejecutivas (ej.: la habilidad de retener información en la memoria, pensar de manera flexible y regular los comportamientos y el pensamiento).[8,9] Las capacidades lingüísticas también tienen un papel fundamental[10–12]: los niños que aprenden dos idiomas, por ejemplo, pueden tener la comprensión conceptual, pero quizás aún estén desarrollando su vocabulario matemático en ambas lenguas.[13–16] Inicialmente, quizás sean más capaces de demostrar sus habilidades matemáticas de manera no verbal.

Los bebés, incluso durante su primera semana de vida, prestan atención al número y notan diferencias en las cantidades.

Además, la calidad de las experiencias matemáticas en los hogares, las comunidades y los entornos de cuidado infantil de los niños, antes de su ingreso a la enseñanza formal, tiene un papel significativo en el desarrollo de sus habilidades y conceptos matemáticos tempranos.[17–21] La investigación sugiere que hay factores socioeconómicos relacionados al desarrollo de las habilidades matemáticas de los niños pequeños.[22,23] Debido a los diferentes factores que influyen en el aprendizaje de matemáticas, algunos niños pueden superar las competencias que se describen para un período de desarrollo particular mientras que otros quizás necesitan más tiempo y apoyo para alcanzar ese nivel. El Apéndice A muestra un resumen de los fundamentos y estándares de aritmética temprana para los bebés y niños pequeños, los niños en edad preescolar y los alumnos en escuelas primarias de California.

La sensibilidad a la cantidad durante la infancia

Los bebés, incluso durante su primera semana de vida,[24,25] prestan atención al número y notan diferencias en las cantidades.[26–30] Por ejemplo, los bebés pueden notar la diferencia entre dos cantidades que son significativamente diferentes entre sí (proporción 1:2), tal como un grupo de 8 puntos en comparación a un grupo de 16 puntos.[31] A medida que los bebés se acercan a su primer cumpleaños, notan diferencias aún más sutiles entre dos cantidades (proporción 2:3), como entre grupos de 8 puntos y 12 puntos.[32–34]

Los bebés también notan cuando una cantidad ha aumentado o disminuido. Por ejemplo, muchos niños de nueve meses tienen algunas expectativas sobre lo que ocurrirá cuando usted añade o retire objetos de un grupo. Los investigadores son capaces de estudiar las expectativas de los bebés sobre las cantidades cambiantes, comparando cuánto tiempo observan los eventos que son inesperados en comparación a los esperados. Los bebés reaccionan de esta manera debido a que para ellos las cosas inesperadas son más interesantes y, por lo tanto, tienen una tendencia a observarlas más tiempo en comparación a las cosas esperadas.[35] Por ejemplo, en un estudio, los investigadores mostraron a bebés de cinco meses dos muñecas, las cubrieron con un biombo y luego extendieron su brazo por detrás del biombo para retirar una muñeca (todo a la vista de los bebés). Cuando los investigadores bajaron el biombo, mostraron una muñeca (que sería esperado después de haber quitado una muñeca de las dos originales) o dos muñecas (que sería inesperado). Registraron el tiempo de observación de los bebés en ambas situaciones y descubrieron que los bebés observaron más tiempo el evento inesperado (cuando había dos muñecas detrás del biombo).

Bebé
- Nota las cantidades de cosas en el entorno
- Sensible a los cambios en las cantidades

Niño pequeño
- Comprende más y menos
- Conoce algunas palabras numéricas pero todavía está aprendiendo su significado exacto
- Puede sumar y restar pequeñas cantidades aproximadas

Preescolar
- Compara dos cantidades en términos de más o menos
- Puede sumar y restar pequeñas cantidades de objetos concretos
- Utiliza palabras numéricas solo para pequeños grupos
- Comienza a utilizar el conteo como estrategia para la suma

Primaria
- Puede sumar y restar cantidades mayores
- Aprende propiedades aritméticas (ej.: 5 + 4 = 4 + 5)
- Utiliza diversas estrategias para resolver problemas (ej.: contar todos, continuar contando, descomposición)
- Resuelve problemas aritméticos de palabra simples

The California Statewide Early Math Initiative is funded by
the California Department of Education, Early Learning and Care Division and the California State Board of Education.

El hallazgo de que los bebés son sensibles a la cantidad sugiere que los humanos nacen con la capacidad de pensar y aprender sobre los números. Esta sensibilidad temprana y no verbal a la cantidad establece la base para razonar sobre los cambios en las cantidades durante la niñez[37] y para las habilidades aritméticas que se desarrollan más tarde.

Razonar sobre las cantidades durante la niñez

Los niños pequeños tienen habilidades impresionantes para el razonamiento sobre las cantidades. Los investigadores han descubierto más información sobre la capacidad aritmética emergente de los niños pequeños al presentar los problemas de manera no verbal (como un grupo de objetos que se transforma al añadir o quitar objetos) y al utilizar solo pequeñas cantidades de objetos (hasta tres en total). Esta línea de trabajo ha revelado que los niños pequeños comprenden que la adición tiene como resultado más de algo y que la resta tiene como resultado menos de algo.[42,43] De hecho, cuando les piden que añaden un grupo de objetos al otro, los niños pequeños pueden incluso darse cuenta de cuántos de esos objetos habría en total[42] Es decir que los niños pequeños son capaces de hacer aritmética aproximada.

¿Cómo es la aritmética aproximada? Imagine que usted muestra dos fresas a un niño pequeño, antes de colocarlas en una canasta cubierta y luego le muestra una fresa más, antes de colocarla en la canasta. Pocos niños de dos años y medio podrían descubrir que ahora hay exactamente tres fresas en la canasta. Sin embargo, la mayoría de los niños de dos años y medio (e incluso muchos niños de un año y medio[44]) demostrarían la comprensión de que hay más fresas en la canasta que las que había antes. Lo que es incluso más sorprendente, si pidiera a los niños de dos años y medio que le den exactamente el mismo

número de fresas que usted había colocado en la canasta, muchos le darían una cantidad bastante cercana a tres,[42] aunque probablemente no podrían darle exactamente tres de manera fiable. De manera similar, si usted pidiera que sacaran las fresas de la canasta una a la vez, quizás dejarían de mirar dentro de la canasta ya que hayan retirado tres fresas.[43]

Aunque los niños de esta edad pueden resolver problemas aritméticos simples no verbales de manera aproximada, se vuelven más atentos al número exacto de objetos de un grupo. Algunas investigaciones han encontrado que los niños pequeños pueden pensar en cantidades con más precisión, dependiendo de las características de los objetos del grupo.[45] Por ejemplo, si usted colocara una fresa y una mora sobre su plato y pidiera a un niño de dos años que prepare su plato igual al de usted, muy probablemente colocaría exactamente una fresa y una mora

Implicaciones prácticas para adultos que trabajan con bebés y niños pequeños

Una manera clave de apoyar la capacidad cuantitativa temprana de los bebés y niños pequeños es atraer su atención a los números y las cantidades en el mundo a su alrededor. Se puede tomar este enfoque mediante el juego con grupos de objetos que pueden ser agrupados, comparados, combinados y separados. Utilizar palabras relacionadas a los números y lenguaje cuantitativo (ej.: "Más", "Menos", "Igual") durante interacciones con niños, incluso antes de que puedan hablar (o si parece que no comprenden), sienta la base para desarrollar el vocabulario matemático de los niños en los años futuros. Este vocabulario los ayudará a desarrollar habilidades aritméticas y una comprensión conceptual durante el preescolar y los primeros años de la escuela primaria.[10,46–48]

Estrategias basadas en la investigación:

- Referirse a objetos concretos al contar en lugar de solamente contar de memoria.[48] Por ejemplo, al contar hasta tres, contar tres bloques o tres palas en el arenero.
- Durante el juego y las rutinas diarias, ofrecer oportunidades para agrupar y combinar grupos de objetos. Al hacerlo, contar los objetos y nombrar el tamaño total del grupo.[49] Por ejemplo, añadir un carro a un grupo de dos y contar "1, 2, 3" y luego decir, "tenemos tres carros en total".
- Utilizar palabras para comparar cantidades de objetos, tales como quién tiene "más" o "menos."[46]

The California Statewide Early Math Initiative is funded by
the California Department of Education, Early Learning and Care Division and the California State Board of Education.

en su plato. El argumento es que cuando los objetos dentro de un grupo pequeño son diferentes entre sí, los niños pequeños prestan más atención espontáneamente a la cantidad exacta del grupo. Otro factor que puede afectar la atención de los niños a las cantidades exactas es su comprensión del significado de las palabras relacionadas a números, tales como "dos" o "tres".[45] Estas habilidades emergentes de pensar en el número exacto de objetos de un grupo es un precursor para desarrollar habilidades aritméticas no verbales durante los años de preescolar, cuando comienzan a añadir y restar pequeños números de objetos.[42]

La aritmética durante los años de preescolar

Durante los años de preescolar, muchos niños han llegado más allá de razonar sobre las cantidades de manera aproximada y comienzan a pensar en transformar cantidades de objetos con mayor precisión.[42,50,51] Por ejemplo (utilizando el ejemplo de la canasta de fresas que usamos antes), si usted coloca dos fresas en una canasta, añade una más, y luego pide a un niño de cuatro años que le dé el mismo número de fresas que las que están en su canasta, muy probablemente él podría darle exactamente tres fresas. Sin embargo, a esta edad los niños todavía están construyendo su vocabulario de las palabras de cantidad (ej.: "Más" o "Menos") y las operaciones aritméticas (ej.: "Añadir", "Restar", "Más", "Menos")[52] y también la capacidad de llevar un registro de la información en sus mentes.[53,54]

Debido a estas características del desarrollo, es más fácil notar la habilidad emergente de los niños en edad preescolar de sumar y restar cuando les presentamos los problemas de manera no verbal—utilizando pequeñas cantidades de objetos (ej.: fresas, bloques, vehículos)—que cuando les presentamos los problemas de manera verbal, tal como "¿cuánto es dos más uno?"[42,50,51]

Aproximadamente a los cuatro años, los niños utilizan las cuentas y las palabras relacionadas a los números de manera más precisa para nombrar las cantidades de los objetos y comienzan a demostrar habilidades emergentes de aritmética verbal.

Implicaciones prácticas para adultos que trabajan con niños en edad preescolar

Las capacidades aritméticas de los niños durante el preescolar pueden ser apoyadas invitándolos a participar en tareas que incluyan el razonamiento cuantitativo, como contar, comparar, combinar y separar grupos de objetos. Durante estas actividades, reafirme el uso de palabras relacionadas con los números y el lenguaje matemático (ej.: "Más", "Menos", "Sumar", "Quitar", "Todos", "Algunos", "Ninguno"). A esta edad, los niños están listos para razonar de manera cuantitativa con grupos de cinco objetos o más, según su nivel de habilidad actual. A medida que los niños participen en resolución de problemas utilizando objetos concretos, desarrollan una comprensión más profunda de la suma y la resta.

Estrategias basadas en la investigación:

- Apoyar el conocimiento de la correspondencia uno a uno mediante las interacciones y el juego diarios, como colocando cuatro platos en la mesa para que cuatro personas coman.
- Comparar dos grupos de objetos y hablar sobre qué grupo tiene más.[56] Comenzar comparando cantidades que son muy diferentes (ej.: 10 comparado a 3) y comparando gradualmente cantidades que son muy similares (ej.: 6 comparado a 7).[57]
- Ayudar a los niños a comprender el valor numérico de las palabras numéricas (ej.: que la palabra "cinco" significa exactamente cinco objetos). Por ejemplo, alentar a los niños a crear grupos de un número exacto[42] mediante el juego y las rutinas diarias, como intentar encontrar cinco osos de peluche escondidos en una habitación, o colocar tres rebanadas de naranja en un plato.
- Invitar a los niños a añadir o quitar un objeto de un grupo y encontrar el total. Por ejemplo, preguntar: "teníamos cinco ositos y encontramos uno más. ¿Cuántos tenemos ahora?" Adoptando ese enfoque repetidamente reafirmará la conexión entre la secuencia de cuenta y el concepto de suma (es decir, que añadir un objeto más a un grupo tiene como resultado que el tamaño del grupo es un número más alto en la lista de la cuenta[58,59]). Gradualmente, puede trabajar añadiendo dos más o quitando dos.
- Invitar a los niños a hacer predicciones de cuántos objetos quedarán luego de quitar algunos o cuántos habrá luego de añadir algunos objetos.[55] Por ejemplo, durante la hora de la comida, invite a un niño que cuente seis fresas y las coloque en su plato, luego usted coloque una fresa más en el plato del niño. Vea si él puede predecir cuántas fresas hay ahora en el plato, luego invítelo a contar y comprobar su predicción.

The California Statewide Early Math Initiative is funded by
the California Department of Education, Early Learning and Care Division and the California State Board of Education.

A medida que las habilidades de los niños de aritmética no verbal mejoran, se sienten más cómodos al razonar sobre cantidades cada vez mayores.[42,50] Por ejemplo, desde los dos años y medio hasta los cuatro, se sienten cómodos para sumar y restar dentro de un grupo total de aproximadamente dos a tres objetos concretos.[42] Sin embargo, empezando alrededor de los cuatro años, se sienten más cómodos para sumar o restar dentro de un grupo total de aproximadamente cinco a seis objetos concretos.[42,50]

Aproximadamente a los cuatro años, los niños utilizan las cuentas y las palabras relacionadas a los números de manera más precisa para nombrar las cantidades de los objetos y comienzan a demostrar habilidades emergentes de aritmética verbal.[50] Uno de los signos tempranos de este paso de la aritmética no verbal a la verbal puede verse en la capacidad de los niños de hacer una predicción verbal de cuál será el tamaño de un grupo luego de que algunos objetos se hayan añadido o quitado. Por ejemplo, imagine que usted muestra a una niña de edad preescolar un grupo de siete mandarinas y le pide que las cuente para descubrir cuántas hay. Luego, cubra el grupo de mandarinas y añada dos más, diciendo “ahora tenemos dos mandarinas más. ¿Cuántas mandarinas tenemos en total?” En esta situación, la predicción verbal de los niños sobre el número total de mandarinas es exacto o cercano al número correcto.[55] A esta edad, los niños también adquieren la habilidad de resolver problemas aritméticos presentados verbalmente (ej.: “¿Cuánto es 3 + 1?”) y tienden a sentirse muy cómodos para resolver problemas que involucren números entre el uno y el seis.[50]

El desarrollo de la aritmética durante los primeros grados de la primaria: Conceptos y estrategias

Desde el kindergarten hasta los primeros años de la escuela, los niños se encuentran en el camino hacia el dominio de la suma y la resta verbal (ej.: 9 + 6 = ___). Durante este tiempo, desarrollan la comprensión de los conceptos aritméticos y aprenden a utilizar diferentes estrategias para resolver problemas aritméticos con eficiencia y precisión. También tienen más dominio de su comprensión de los problemas con palabras y de cómo resolverlos.

Desarrollando la comprensión de los conceptos aritméticos

La comprensión conceptual de la aritmética proporciona la base para resolver problemas aritméticos con comprensión. El conocimiento de la aritmética conceptual incluye la comprensión de las propiedades de la aritmética, como saber que 5 + 4 = 4 + 5 (propiedad conmutativa de la suma) y que 5 + 4 - 4 = 5 (propiedad inversa de la resta). Otro conocimiento conceptual incluye la comprensión de que el sistema de cuentas es un patrón que se repite cada 10 números (es decir, la estructura de base 10 del sistema numérico). Este conocimiento ayuda a los niños a abordar los problemas de una manera más flexible en lugar de aplicar los procedimientos de memoria. A su vez, esta flexibilidad los ayuda a ser más eficientes y a evitar errores.[60–63]

Al llegar a la edad del kindergarten, muchos niños tienden a demostrar un conocimiento básico de la propiedad conmutativa al resolver problemas con objetos físicos.[51,64–66] Por ejemplo, los niños de esta edad comprenden que si primero les da tres bloques color naranja y luego les da dos bloques rojos, tendrán el mismo número total de bloques que si les hubiera dado primero los dos bloques rojos y luego los tres bloques naranjas. Sin embargo, los niños podrían no ser capaces de aplicar este conocimiento básico a los problemas presentados verbalmente (es decir, sin objetos físicos) hasta los primeros tiempos de la escuela primaria.[65,67,68] Por ejemplo, si presentara los problemas por escrito 6 + 3 y 3 + 6 uno al lado del otro y preguntara a un niño de seis años que le dijera si esos dos problemas tienen la misma respuesta, podría no decir “sí” sistemáticamente. De manera similar, pareciera que una comprensión de la relación inversa entre la suma y la resta en los problemas presentados verbalmente (ej.: “¿Puedes utilizar su respuesta a 9 + 4 para poder averiguar la respuesta a 13 - 4?”) surge durante los primeros tiempos de la escuela primaria.[69]

La comprensión de los niños de este sistema numérico de base 10 también se desarrolla de manera sustancial durante este período. En etapas tempranas, antes de que los niños hayan estado expuestos a una enseñanza formal de matemáticas, tienden a pensar en las cantidades como recopilaciones de unidades en lugar de como grupos de 10 y de 1.[70] Por ejemplo, si pidiera a un niño de cinco años que le mostrara 13 bloques (con los cubos representando 1 y las barras representando 10), probablemente contaría 13 unidades de bloques individuales. Sin embargo, desde kindergarten hasta los primeros años de la escuela, los niños representan los números cada vez mayores a 10 utilizando una combinación de 10 y de 1. Por ejemplo, si le pidiera que le muestre 13 utilizando bloques, un niño de siete años probablemente colocaría una barra (representando 10) junto con tres cubos de unidades.[71–73]

The California Statewide Early Math Initiative is funded by
the California Department of Education, Early Learning and Care Division and the California State Board of Education.

El desarrollo de las estrategias aritméticas

Las estrategias que utilizan los niños para añadir y sustraer son una parte importante de su desarrollo aritmético. Aprender a utilizar estrategias aritméticas mentales eficaces usualmente lleva a respuestas más precisas.[74–76] Un uso exitoso de estas estrategias requiere una enseñanza orientada de los maestros y oportunidades repetidas para aplicarlas de maneras significativas. Desde el kindergarten hasta el segundo grado, los niños atraviesan una transformación importante en la manera en la que abordan problemas aritméticos. En etapas tempranas, los niños tienden a utilizar estrategias que son ineficientes y tienen como resultado más errores, tal como contar con cinco dedos y tres dedos más para sumar cinco más tres, pero pierden el hilo mientras cuentan. Más adelante, comienzan a utilizar estrategias más eficientes y precisas, como pensar "sé que 5 + 2 = 7, y tres es uno más que dos, entonces 5 + 3 = 8".[77,78] La estrategia que eligen para un problema en particular tiende a ser la más eficiente que sienten que pueden utilizar sin cometer errores.[79] Por ejemplo, una niña contará utilizando sus dedos para resolver un problema de suma si cree que será más probable llegar así a la respuesta correcta que si contara verbalmente, pero, si se siente segura para resolver el problema sin utilizar sus dedos, elegirá una estrategia para contar verbalmente porque es más eficaz. Sin embargo, como se describe a continuación, los niños generalmente pasan a elegir estrategias más avanzadas con el transcurso del tiempo.[79]

Estrategias para contar. Los niños en el kindergarten hacen uso de sus habilidades para contar para sumar y restar, y tienden a utilizar objetos concretos como ayuda para llevar la cuenta mientras lo hacen. Por ejemplo, cuando le presentan el problema 6 + 3, una estrategia típica que utilizan los niños en edad de kindergarten es contar uno a uno seis objetos, tal como osos de peluche, y luego contar tres más antes de volver a contar todo el grupo de nueve.[77] Esta estrategia de "contar todos" apoya la capacidad aritmética verbal más temprana de los niños.

Los niños en el kindergarten hacen uso de sus habilidades para contar para sumar y restar, y tienden a utilizar objetos concretos como ayuda para llevar la cuenta mientras lo hacen.

Al momento de llegar al primer grado, los niños utilizan las estrategias para contar de manera más eficiente: comienzan a contar desde uno de los números de un problema de suma en lugar de contar desde el uno.[77] Por ejemplo, cuando le preguntan "¿cuánto es 3 + 5?", un niño podría decir en voz alta o susurrar a sí mismo "5" y luego contar tres dedos más "6, 7, 8". Esta estrategia puede ser desafiante para los niños, ya que requiere que sean capaces de comenzar a contar desde números diferentes al uno. Lleva tiempo y mucha práctica que los niños utilicen las estrategias de "continuar contando" con comodidad. Diferentes tipos de estrategias de continuar la cuenta reflejan los diferentes niveles de comprensión conceptual. En las primeras etapas, antes de que los niños comprendan la propiedad conmutativa de la suma, los niños generalmente cuentan desde el número que se les presenta primero.[77] Por ejemplo, con el problema 3 + 6, comenzarán con tres y contarán hasta seis. Sin embargo, los niños que comprenden la propiedad conmutativa de la suma, podrían elegir comenzar con el número más alto (en este caso seis) y contar el número más pequeño (tres), porque es más eficiente.

Estrategias basadas en la memoria. A medida que los niños dominan las estrategias de contar, comienzan a memorizar hechos relacionados a los números.[77] Por ejemplo, luego de resolver el problema 5 + 3 utilizando una estrategia para contar muchas veces, eventualmente recordarán que la respuesta a 5 + 3 es 8 y será menos probable que dependan de las cuentas para resolver ese problema en el futuro. Al principio, los niños tienden a memorizar sumas y diferencias de números de dos dígitos (ej.: 6 + 3 = 9, 7 - 2 = 5), de 10 (ej.: 10 + 10 = 20, 30 – 10 = 20), o múltiplos de 10 (ej.: 200 + 300 = 500, 400 – 100 = 300). Cuando les dan un problema que todavía no han memorizado, muchos niños confían en los hechos relacionados a los números que sí conocen como ayuda para resolver problemas en sus cabezas. Por ejemplo, quizás sepan que 5 + 5 = 10, entonces, al pedirles que resuelvan 5 + 7, podrían decir "sé que 5 + 5 = 10, y 7 es 2 más que 5, entonces es 12". Este tipo de estrategia implica descomponer números, es decir separar siete en cinco y dos, y refleja un conocimiento de la relación parte-todo entre los números. [60,61] Es la manera más eficiente para que los niños resuelvan un problema en su cabeza (sin el uso de herramientas para contar o papel) y generalmente tiene como resultado respuestas más precisas que las estrategias para contar.[75,76,80–82]

The California Statewide Early Math Initiative is funded by the California Department of Education, Early Learning and Care Division and the California State Board of Education.

El desarrollo de resolución de problemas aritméticos con palabras

Aprender a resolver problemas con palabras representa un logro importante para los alumnos de la escuela primaria. La resolución de problemas orales requiere un alto nivel de razonamiento, que incluye el conocimiento de la aritmética conceptual y la fluidez en los procedimientos de resolución de problemas.[83,84] En las primeras etapas, los niños generalmente resuelven problemas presentados verbalmente contando objetos o sus propios dedos.[85] Por ejemplo, muchos niños en edad de kindergarten (llegando a los seis años) pueden resolver un simple problema de cuento, tal como el siguiente, con la ayuda de objetos concretos o sus dedos: "Sam tiene cuatro crayones. Consiguió dos crayones más. ¿Cuántos crayones tiene ahora?"[50] Los alumnos un poco más grandes (por ejemplo, en primer grado) pueden incluso resolver problemas con una estructura más compleja, como este: "Sam tiene tres crayones. Consiguió algunos más. Ahora tiene siete crayones. ¿Cuántos crayones consiguió?" Ellos podrían resolver este problema utilizando una estrategia muy intuitiva, como contar tres objetos, añadir más objetos al grupo de a uno mientras cuentan en voz alta hasta llegar a siete, y finalmente contando el número de objetos que añadieron para llegar a la respuesta cuatro.[86]

Durante los primeros grados, los niños aprenden a resolver problemas con números más altos. Sin embargo, sin depender de objetos concretos como herramienta, resolver problemas con palabras más avanzados puede ser un desafío para los alumnos. Otro desafío es que están expuestos a una mayor variedad de problemas de palabras, como los que involucran comparaciones o que comienzan con un número desconocido (ej.: Sam tenía algunos crayones. Consiguió 9 más. Ahora tiene 21. ¿Cuántos crayones tenía al comienzo?). Frecuentemente no es intuitivo del lenguaje de los problemas de palabras si deben utilizar la suma, la resta o una combinación para resolver el problema. Con el apoyo de la enseñanza, los alumnos aprenden a leer el problema completamente y a representar el problema de manera esquemática para ayudarlos a identificar la estructura del problema.[87–89] Siguiendo estos tres primeros pasos que enfatizan la comprensión, aprenden a escribir un problema en una oración antes de completar los cálculos que necesitan para resolver el problema.[88,90,91]

Al momento de llegar al primer grado, los niños utilizan las estrategias para contar de manera más eficiente: comienzan a contar desde uno de los números de un problema de suma en lugar de contar desde el uno.

Implicaciones prácticas para adultos que trabajan con niños en la escuela primaria

A medida que los niños desarrollan habilidades de aritmética verbal, la manera en que resuelven problemas de sumas y restas es igualmente importante que resolver los problemas correctamente. Presentar a los niños diferentes estrategias de resolución de problemas y alentarlos a ser flexibles en su uso de diferentes estrategias aumentará su fluidez, desarrollará su conocimiento de los hechos numéricos simples y finalmente los ayudará a resolver problemas aritméticos con más precisión.[7,74,77] La resolución de problema flexible está apoyada por la comprensión conceptual de la aritmética[61] y por la enseñanza de cómo utilizar los hechos numéricos para ayudarlos a resolver los problemas de los que no conocen la respuesta.[92,93]

Estrategias basadas en la investigación:

- Al utilizar objetos concretos para apoyar las estrategias de cuentas, elegir objetos que desarrollen la comprensión conceptual de los niños. Por ejemplo, utilizar bloques o cubos para contar encastrables, que resaltan la estructura de base 10 del sistema numérico.[62,63] Eliminar gradualmente el uso de los objetos concretos a medida que los niños desarrollan su fluidez para implementar estrategias para contar.
- El uso de tablas numéricas o líneas de números como herramientas para la resolución de problemas aritméticos puede ayudar a los niños a pasar de utilizar objetos concretos a utilizar estrategias de cuentas mentales y verbales. Por ejemplo, los niños pueden utilizar una línea de números para apoyar una estrategia de "continuar contando" al sumar 7 + 5 (ej.: comienzan en 7 y cuentan hasta 12 mientras señalan cada espacio de la línea de números). De manera similar, las grillas de números 0–10 o 0–100 pueden ser utilizadas como juegos de mesa (como el juego serpientes y escaleras) y proporcionan oportunidades para practicar estrategias de continuar contando para mover las fichas. Por ejemplo, si la ficha de un niño se encuentra en el número cuatro y lanza un tres en el dado, podría comenzar en "4" y contar tres dedos más, "5, 6, 7."[94,95]

The California Statewide Early Math Initiative is funded by
the California Department of Education, Early Learning and Care Division and the California State Board of Education.

- La práctica repetida de hechos numéricos (ej.: memorizar dobles, combinaciones de a 10), puede proporcionar una buena base para resolver problemas no memorizados.[92,93,96] Por ejemplo, si un niño ha memorizado 6 + 6, alentarlo a utilizar ese hecho numérico para resolver un problema cercano al doble, como 6 + 7. De modo similar, se puede alentar a los niños a utilizar su conocimiento de las combinaciones de a 10, como 7 + 3 = 10, para resolver problemas que llegan hasta el siguiente grupo de 10, como 7 + 6 (ej.: 7 + 6 = 7 + 3 + 3 = 10 + 3 = 13).
- Establecer conexiones entre los problemas de suma y de resta para resaltar la relación inversa entre estas dos operaciones (ej.: mostrar cómo el problema 5 + 3 puede ayudarlos a averiguar la respuesta al problema 8 - 3)[68,69] en lugar de simplemente trabajar en problemas de suma y resta de manera separada.
- Enfatizar la comprensión completa de los problemas con palabras en lugar de elegir palabras clave fuera de contexto y ayudar a los niños a identificar la estructura del problema antes de elegir una estrategia de cálculo.[88,90,97–99]
- Con los problemas de palabras, establecer conexiones entre los problemas con estructuras similares (ej.: un problema de palabras sobre cuatro globos expresado ? + 5 = 12 es similar a un problema de palabras sobre carros expresado ? + 9 = 14). Esta estrategia facilitará la comprensión conceptual de los niños de los problemas que pueden parecer diferentes en la superficie pero que de hecho tienen estructuras aritméticas similares.[99]

Conclusión

Como hemos descrito en este informe, el desarrollo de la aritmética de los niños comienza en las primeras semanas de vida, cuando demuestran una sensibilidad innata a las cantidades.[24,25] Progresa durante los años de infancia y preescolar hasta el razonamiento sobre las pequeñas cantidades de objetos concretos.[42,50] Finalmente, los alumnos en la escuela primaria desarrollan una comprensión conceptual mayor, la capacidad de seguir procedimientos matemáticos y habilidades de resolución de problemas de un nivel superior.[100] Los cuidadores y maestros tienen un papel fundamental al apoyar esta trayectoria. Cuando se apoya la capacidad natural de los niños pequeños de razonar sobre las cantidades, adquieren el vocabulario, las estrategias y el conocimiento necesarios para resolver problemas aritméticos de manera fluida y precisa.

The California Statewide Early Math Initiative is funded by
the California Department of Education, Early Learning and Care Division and the California State Board of Education.

Apéndice A: Los fundamentos del aprendizaje temprano y estándares de California en la aritmética

Fundamentos del aprendizaje y el desarrollo infantil de California

Fundamento: El sentido numérico

El creciente desarrollo de la comprensión de los números y las cantidades

8 meses	18 meses	36 meses
Alrededor de los ocho meses, los niños generalmente se centran en un objeto o persona a la vez, pero es posible que a veces sostengan dos objetos, uno en cada mano.	Alrededor de los 18 meses, los niños demuestran comprender que existen diferentes cantidades de cosas.	Alrededor de los 36 meses, los niños demuestran entender, hasta cierto punto, que los números representan cuánto. También demuestran el conocimiento de las palabras que identifican las cantidades.

Fuente: Fundamentos del aprendizaje y el desarrollo infantil de California[101]

Fundamentos del aprendizaje preescolar de California: Fundamentos en las matemáticas

Sentido numérico: Subárea 2.0

	Aproximadamente a los 48 meses de edad	Aproximadamente a los 60 meses de edad
Sentido numérico	**2.0 Los niños comienzan a comprender relaciones y operaciones con números en su entorno diario.** 2.1 Comparan visualmente (con o sin conteo) dos grupos de objetos que son obviamente iguales o diferentes y comunican, "más" o "el mismo". 2.2 Comprenden que agregar (o quitar) uno o más objetos de un grupo aumentará (o disminuirá) la cantidad de objetos en el grupo. 2.3 Comprenden que unir dos grupos de objetos hará que el grupo sea más grande. 2.4 Resuelven problemas simples de suma y resta de manera no verbal (y a menudo verbal) con un número muy pequeño de objetos (suma hasta 4 o 5).	**2.0 Los niños expanden su comprensión de las relaciones y operaciones de números en su entorno diario.** 2.1 Comparan, contando o combinando, dos grupos de hasta cinco objetos y comunicar, "más", "mismo que", o "menos cantidad" ("menos"). 2.2 Comprenden que sumar uno o restar uno cambia la cantidad en un grupo pequeño de objetos exactamente por uno. 2.3 Comprenden que unir dos grupos de objetos hará un grupo más grande y que un grupo de objetos se puede desarmar en grupos más pequeños. 2.4 Resuelven problemas de suma y resta simples con un número pequeño de objetos (suma hasta 10), generalmente contando.
Razonamiento matemático	**1.0 Los niños usan pensamiento matemático para resolver problemas que surgen en su entorno diario.** 1.1 Comienzan a aplicar estrategias matemáticas simples para resolver problemas en su entorno.	**1.0 Los niños expanden el uso del pensamiento matemático para resolver problemas que surgen en su entorno diario.** 1.1 Identifican y aplican una variedad de estrategias matemáticas para resolver problemas en su entorno.

Fuente: Fundamentos del aprendizaje preescolar de California: Fundamentos en las matemáticas[102]

The California Statewide Early Math Initiative is funded by
the California Department of Education, Early Learning and Care Division and the California State Board of Education.

Dominios: Operaciones y pensamiento algebraico; Número y operaciones en base diez

	Kindergarten	Grado 1	Grado 2
Operaciones y pensamiento algebraico	K.OA	1.OA	2.OA
	Entienden la suma como juntar y agregar, y entienden la resta como separar y quitar.	**Representan y resuelven problemas relacionados a la de suma y a la resta.**	**Representan y resuelven problemas relacionados a la suma y a la resta.**
	1. Representan la suma y la resta con objetos, dedos, imágenes mentales, dibujos, sonidos (por ejemplo, palmadas), dramatizaciones, explicaciones verbales, expresiones, o ecuaciones. 2. Resuelven problemas verbales de sumal y resta, y suman y restan hasta 10, por ejemplo, utilizar objetos o dibujos para representar el problema. 3. Descomponen números menores que o iguales a 10 en pares de varias maneras, por ejemplo, utilizan objetos o dibujos, y representan cada descomposición con un dibujo o una ecuación (por ejemplo, 5 = 2 + 3 y 5 = 4 + 1). 4. Para cualquier número entre el 1 al 9, hallan el número que llega al 10 cuando se le suma al número determinado, por ejemplo, al utiizar objetos o dibujos, y representar la respuesta con un dibujo o una ecuación. 5. Suman y restan con fluidez de y hasta el número 5.	1. Utilizan la suma y la resta hasta el número 20 para resolver problemas verbales relacionados a situaciones en las cuales tienen que sumar, restar, unir, separar, y comparar, con valores desconocidos en todas las posiciones, por ejemplo, al representar el problema a través del uso de objetos, dibujos, y ecuaciones con un símbolo para el número desconocido. 2. Resuelven problemas verbales que requieren la suma de tres números enteros cuya suma es menor o igual a 20, por ejemplo, al representar el problema a través del uso de objetos, dibujos, y ecuaciones con un símbolo para el número desconocido.	1. Usan la suma y la resta hasta el número 100 para resolver problemas verbales de uno y dos pasos relacionados a situaciones en las cuales tienen que sumar, restar, unir, separar, y comparar, con valores desconocidos en todas las posiciones, por ejemplo, al representar el problema a través del uso de dibujos y ecuaciones con un símbolo para el número desconocido.
		Comprenden y aplican las propiedades de operaciones, así como la relación entre la suma y la resta.	**Suman y restan hasta el número 20.**
		3. Aplican las propiedades de las operaciones como estrategias para sumar y restar. Ejemplos: Si saben que 8 + 3 = 11, entonces, saben también que 3 + 8 = 11 (Propiedad conmutativa de la suma). Para sumar 2 + 6 + 4, los últimos dos números se pueden sumar para obtener el número 10, por lo tanto 2 + 6 + 4 = 2 + 10 = 12 (Propiedad asociativa de la suma). 4. Comprenden la resta como un problema de un sumando desconocido. Por ejemplo, restan 10 – 8 con el fin de encontrar el número que al sumarse al 8 resulta en 10.	2. Suman y restan con fluidez hasta el número 20 usando estrategias mentales. Al final del segundo grado, saben de memoria todas las sumas de dos números de un solo dígito.

The California Statewide Early Math Initiative is funded by
the California Department of Education, Early Learning and Care Division and the California State Board of Education.

	Kindergarten	Grado 1	Grado 2
Operaciones y pensamiento algebraico		1.OA	2.OA
		Suman y restan hasta el número 20.	**Trabajan con grupos de objetos equivalentes para establecer los fundamentos para la multiplicación.**
		5. Relacionan el conteo con la suma y la resta (por ejemplo, al contar de 2 en 2 para sumar 2). 6. Suman y restan hasta el número 20, demostrando fluidez al sumar y al restar hasta 10. Utilizan estrategias tales como el contar hacia adelante; el formar diez (por ejemplo, 8 + 6 = 8 + 2 + 4 = 10 + 4 = 14); el descomponer un número para obtener el diez (por ejemplo, 13 – 4 = 13 – 3 – 1 = 10 – 1 = 9); el utilizar la relación entre la suma y la resta (por ejemplo, al saber que 8 + 4 = 12, se sabe que 12 – 8 = 4); y el crear sumas equivalentes pero más sencillas o conocidas (por ejemplo, al sumar 6 + 7 crean el equivalente conocido 6 + 6 + 1 = 12 + 1 = 13).	3. Determinan si un grupo de objetos (hasta 20) tiene un número par o impar de miembros, por ejemplo, al emparejar objetos o al contar de dos en dos; escriben ecuaciones para expresar un número par como el resultado de una suma de dos sumandos iguales. 4. Utilizan la suma para encontrar el número total de objetos colocados en forma rectangular con hasta 5 hileras y hasta 5 columnas; escriben una ecuación para expresar el total como la suma.
		Trabajan con ecuaciones de suma y resta.	
		7. Entienden el significado del signo igual, y determinan si las ecuaciones de suma y resta son verdaderas o falsas. Por ejemplo, ¿Cuáles de las siguientes ecuaciones son verdaderas y cuáles son falsas? 6 = 6, 7 = 8 -1, 5 + 2 = 2 + 5, 4 + 1 = 5 + 2 8. Determinan el número entero desconocido en una ecuación de suma o resta que relaciona tres números enteros. Por ejemplo, determinan el número desconocido que hace que la ecuación sea verdadera en cada una de las siguientes ecuaciones: 8 + ? = 11, 5 = ? – 3, 6 + 6 = ?	

The California Statewide Early Math Initiative is funded by
the California Department of Education, Early Learning and Care Division and the California State Board of Education.

	Kindergarten	Grado 1	Grado 2
Número y operaciones en base diez	K.NBT	1.NBT	2.NBT
	Trabajan con los números del 11 al 19 para establecer los fundamentos del valor posicional.	**Extienden la secuencia de conteo.**	**Comprenden el valor de posición.**
	1. Componen y descomponen números del 11 al 19 en diez unidades y algunas más, por ejemplo, al utilizar objetos o dibujos, y representar cada composición o descomposición por medio de un dibujo o ecuación (por ejemplo, 18 = 10 + 8); comprenden que estos números están compuestos por diez unidades y una, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho o nueve unidades.	1. Cuentan hasta 120, comenzando con cualquier número menor que 120. Dentro de este rango, leen y escriben numerales que representan una cantidad de objetos con un numeral escrito.	1. Comprenden que los tres dígitos de un número de tres dígitos representan cantidades de centenas, decenas y unidades; por ejemplo, 706 es igual a 7 centenas, 0 decenas y 6 unidades. Comprenden los siguientes casos especiales: a. 100 puede considerarse como un conjunto de diez decenas – llamado "centena". b. Los números 100, 200, 300, 400, 500, 600, 700, 800, 900 se refieren a una, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho o nueve centenas (y 0 decenas y 0 unidades). 2. Cuentan hasta 1000; cuentan de 2 en 2, de 5 en 5, de 10 en 10, y de 100 en 100. 3. Leen y escriben números hasta 1000 usando numerales en base diez, los nombres de los números, y en forma desarrollada. 4. Comparan dos números de tres dígitos basándose en el significado de los dígitos de las centenas, decenas y las unidades usando los símbolos >, =, < para anotar los resultados de las comparaciones.

The California Statewide Early Math Initiative is funded by
the California Department of Education, Early Learning and Care Division and the California State Board of Education.

	Kindergarten	Grado 1	Grado 2
Número y operaciones en base diez		1.NBT	2.NBT
		Comprenden el valor de posición.	**Utilizan el valor de posición y las propiedades de las operaciones para sumar y restar.**
		2. Entienden que los dos dígitos de un número de dos dígitos representan cantidades de decenas y unidades. Entienden lo siguiente como casos especiales. a. 10 puede considerarse como un conjunto de 10 unidades llamado una “decena.” b. Los números entre 11 y 19 se componen por una decena y una, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho o nueve unidades. c. Los números 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80 y 90 se referieren a una, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho o nueve decenas (y 0 unidades). 3. Comparan dos números de dos dígitos basándose en el significado de los dígitos en las unidades y decenas, anotando los resultados de las comparaciones con el uso de los símbolos >, =, y <.	5. Suman y restan hasta 100 con fluidez usando estrategias basadas en el valor de posicion, las propiedades de las operaciones, y/o la relación entre la suma y la resta. 6. Suman hasta cuatro números de dos dígitos usando estrategias basadas en el valor decposiciona y las propiedades de las operaciones. 7. Suman y restan hasta 1000, usando modelos concretos o dibujos y estrategias basadas en el valor de posición, las propiedades de las operaciones, y/o la relación entre la suma y la resta; relacionan la estrategia con un método escrito. Comprenden que al sumar o restar números de tres dígitos, se suman o restan centenas y centenas, decenas y decenas, unidades y unidades; y a veces es necesario componer y descomponer las decenas o las centenas. 7.1 Usan estrategias de estimación en el cálculo y la resolución de problemas con números hasta 1000. CA. 8. Suman mentalmente 10 ó 100 a un número dado del 100–900, y restan mentalmente 10 ó 100 de un número dado entre 100–900. 9. Explican porqué las estrategias de suma y resta funcionan, al usar el valor posicional y las propiedades de las operaciones.

The California Statewide Early Math Initiative is funded by
the California Department of Education, Early Learning and Care Division and the California State Board of Education.

	Kindergarten	Grado 1	Grado 2
Número y operaciones en base diez		1.NBT	
		Utilizan la comprensión del valor de posición y las propiedades de las operaciones para sumar y restar.	
		4. Suman hasta el 100, incluyendo el sumar un número de dos dígitos y un número de un dígito, así como el sumar un número de dos dígitos y un múltiplo de 10, utilizan modelos concretos o dibujos y estrategias basadas en el valor de posición, las propiedades de las operaciones, y/o la relación entre la suma y la resta; relacionan la estrategia con un método escrito, y explican el razonamiento aplicado. Entienden que al sumar números de dos dígitos, se suman decenas con decenas, unidades con unidades; y a veces es necesario el componer una decena. 5. Dado un número de dos dígitos, hallan mentalmente 10 más o 10 menos que un número, sin la necesidad de contar; explican el razonamiento que utilizaron. 6. Restan múltiplos de 10 en el rango de 10 a 90 a partir de múltiplos de 10 en el rango de 10 a 90 (con diferencias positivas o de cero), utilizando ejemplos concretos o dibujos, y estrategias basadas en el valor de posición, las propiedades de operaciones, y/o la relación entre la suma y la resta; relacionan la estrategia con un método escrito y explican el razonamiento utilizado.	

Fuente: Estándares estatales comunes de matemáticas para el estado de California[103]

The California Statewide Early Math Initiative is funded by
the California Department of Education, Early Learning and Care Division and the California State Board of Education.

Referencias

[1] Clements, D. H., & Sarama, J. (2008). Experimental evaluation of the effects of a research-based preschool mathematics curriculum. *American Educational Research Journal 45*, 443–494.

[2] Clements, D. H., Sarama, J., Spitler, M. E., Lange, A. A., & Wolfe, C. B. (2011). Mathematics learned by young children in an intervention based on learning trajectories: A large-scale cluster randomized trial. *Journal for Research in Mathematics Education 42*, 127–166.

[3] Clements, D. H., Sarama, J., Wolfe, C. B., & Spitler, M. E. (2013). Longitudinal evaluation of a scale-up model for teaching mathematics with trajectories and technologies: Persistence of effects in the third year. *American Educational Research Journal 50,* 812–850.

[4] Sarama, J., Clements, D. H., Starkey, P., Klein, A., & Wakeley, A. (2008). Scaling up the implementation of a pre-kindergarten mathematics curriculum: Teaching for understanding with trajectories and technologies. *Journal of Research on Educational Effectiveness 1*, 89–119.

[5] Duncan, G. J., Dowsett, C. J., Claessens, A., Magnuson, K., Huston, A. C., Klebanov, P., … Japel, C. (2007). School readiness and later achievement. *Developmental Psychology 43*, 1428.

[6] Ginsburg, H. P., Lee, J. S., & Boyd, J. S. (2008). Mathematics Education for Young Children: What It Is and How to Promote It. Social Policy Report. *Society for Research in Child Development 22*(1).

[7] Clements, D. H., & Sarama, J. (2009). *Learning and Teaching Early Math: The Learning Trajectories Approach.* New York, NY: Routledge.

[8] Raghubar, K. P., Barnes, M. A., & Hecht, S. A. (2010). Working memory and mathematics: A review of developmental, individual difference, and cognitive approaches. *Learning and Individual Differences 20*, 110–122.

[9] Cragg, L., & Gilmore, C. (2014). Skills underlying mathematics: The role of executive function in the development of mathematics proficiency. *Trends in Neuroscience and Education 3*, 63–68.

[10] Hornburg, C. B., Schmitt, S. A., & Purpura, D. J. (2018). Relations between preschoolers' mathematical language understanding and specific numeracy skills. *Journal of Experimental Child Psychology 176*, 84–100.

[11] Purpura, D. J., Napoli, A. R., Wehrspann, E. A., & Gold, Z. S. (2017). Causal connections between mathematical language and mathematical knowledge: A dialogic reading intervention. *Journal of Research on Educational Effectiveness 10*, 116–137.

[12] Purpura, D. J., & Reid, E. E. (2016). Mathematics and language: Individual and group differences in mathematical language skills in young children. *Early Childhood Research Quarterly 36*, 259–268.

[13] Romano, E., Babchishin, L., Pagani, L. S., & Kohen, D. (2010). School readiness and later achievement: replication and extension using a nationwide Canadian survey. *Developmental Psychology 46*, 995.

[14] Kleemans, T., Segers, E., & Verhoeven, L. (2011). Cognitive and linguistic precursors to numeracy in kindergarten: Evidence from first and second language learners. *Learning and Individual Differences 21*, 555–561.

[15] Galindo, C. (2009). *English language learners' math and reading achievement trajectories in the elementary grades: Full technical report.* New Brunswick, NJ: National Institute for Early Education Research.

[16] Foster, M. E., Anthony, J. L., Clements, D. H., Sarama, J., & Williams, J. J. (2018). Hispanic dual language learning kindergarten students' response to a numeracy intervention: A randomized control trial. *Early Childhood Research Quarterly 43*, 83–95.

[17] Starkey, P., & Klein, A. (2008). Sociocultural influences on young children's mathematical knowledge. In O. Saracho & B. Spodek (Eds.), *Contemporary perspectives on mathematics in early childhood education* (pp. 253–276). Information Age Publishing Inc.

[18] Lee, V. E., & Burkam, D. T. (2002). *Inequality at the starting gate: Social background differences in achievement as children begin school.* Economic Policy Institute.

[19] Jordan, N. C., Kaplan, D., Nabors Oláh, L., & Locuniak, M. N. (2006). Number sense growth in kindergarten: A longitudinal investigation of children at risk for mathematics difficulties. *Child Development 77*, 153–175.

[20] Saxe, G. B., Guberman, S. R., Gearhart, M., Gelman, R., Massey, C. M., & Rogoff, B. (1987). Social processes in early number development. *Monographs of the Society for Research in Child Development 52*, 1–162.

[21] Levine, S. C., Whealton Suriyakham, L., Rowe, M. L., Huttenlocher, J., & Gunderson, E. A. (2010). What counts in the development of young children's number knowledge? *Developmental Psychology 46,* 1309.

[22] Jordan, N. C., & Levine, S. C. (2009). Socioeconomic variation, number competence, and mathematics learning difficulties in young children. *Developmental Disabilities Research Reviews 15*, 60–68.

[23] Starkey, P., Klein, A., & Wakeley, A.(2004). Enhancing young children's mathematical knowledge through a pre-kindergarten mathematics intervention. *Early Childhood Research Quarterly 19*, 99–120.

[24] Antell, S. E., & Keating, D. P. (1983). Perception of numerical invariance in neonates. *Child Development 54*(3), 695–701.

[25] Izard, V., Sann, C., Spelke, E. S., & Streri, A. (2009). Newborn infants perceive abstract numbers. *Proceedings of the National Academy of Sciences 106*, 10382–10385.

The California Statewide Early Math Initiative is funded by the California Department of Education, Early Learning and Care Division and the California State Board of Education.

[26] Dehaene, S. (1997). *The number sense : How the mind creates mathematics.* Oxford, UK: Oxford University Press.

[27] Gallistel, C. R., & Gelman, R. (1992). Preverbal and verbal counting and computation. *Cognition 44*, 43–74.

[28] Starkey, P., Spelke, E. S., & Gelman, R. (1990). Numerical abstraction by human infants. *Cognition 36*, 97–127.

[29] Starkey, P., Spelke, E. S. & Gelman, R. (1983) Detection of intermodal numerical correspondences by human infants. *Science 222*, 179–181.

[30] Van Loosbroek, E., & Smitsman, A. W. (1990). Visual perception of numerosity in infancy. *Developmental Psychology 26*, 916.

[31] Xu, F., & Spelke, E. S. (2000). Large number discrimination in 6-month-old infants. *Cognition 74*, B1–B11.

[32] Xu, F., & Arriaga, R. I. (2007). Number discrimination in 10-month-old infants. *British Journal of Developmental Psychology 25*, 103–108.

[33] Lipton, J. S., & Spelke, E. S. (2003). Origins of number sense: Large-number discrimination in human infants. *Psychological Science 14*, 396–401.

[34] Wood, J. N., & Spelke, E. S. (2005). Infants' enumeration of actions: Numerical discrimination and its signature limits. *Developmental Science 8*, 173–181.

[35] McCrink, K., & Wynn, K. (2004). Large-number addition and subtraction by 9-month-old infants. *Psychological Science 15*, 776–781.

[36] Halberda, J., Ly, R., Wilmer, J. B., Naiman, D. Q., & Germine, L. (2012). Number sense across the lifespan as revealed by a massive Internet-based sample. *Proceedings of the National Academy of Sciences 109*, 11116–11120.

[37] Libertus, M. E., Feigenson, L., & Halberda, J. (2013). Is approximate number precision a stable predictor of math ability? *Learning and Individual Differences 25,* 126–133.

[38] Chen, Q., & Li, J. (2014). Association between individual differences in non-symbolic number acuity and math performance: A meta-analysis. *Acta Psychologica 148*, 163–172.

[39] Hyde, D. C., Khanum, S., & Spelke, E. S. (2014). Brief non-symbolic, approximate number practice enhances subsequent exact symbolic arithmetic in children. *Cognition 131*, 92–107.

[40] Chu, F. W., vanMarle, K., & Geary, D. C. (2016). Predicting children's reading and mathematics achievement from early quantitative knowledge and domain-general cognitive abilities. *Frontiers in Psychology 7,* 775.

[41] Wang, J. J., Odic, D., Halberda, J., & Feigenson, L. (2016). Changing the precision of preschoolers' approximate number system representations changes their symbolic math performance. *Journal of Experimental Child Psychology 147*, 82–99.

[42] Huttenlocher, J., Jordan, N. C., & Levine, S. C. (1994). A mental model for early arithmetic. *Journal of Experimental Psychology: General 123*, 284.

[43] Starkey, P. (1992). The early development of numerical reasoning. *Cognition 43*, 93–126.

[44] Strauss, M. S., & Curtis, L. E. (1981). Infant perception of numerosity. *Child Development 52*, 1146–1152.

[45] Li, X., & Baroody, A. J. (2014). Young children's spontaneous attention to exact quantity and verbal quantification skills. *European Journal of Developmental Psychology 11*, 608–623.

[46] Barner, D., Chow, K., & Yang, S. J. (2009). Finding one's meaning: A test of the relation between quantifiers and integers in language development. *Cognitive Psychology 58*, 195–219.

[47] Purpura, D. J., & Logan, J. A. (2015). The nonlinear relations of the approximate number system and mathematical language to early mathematics development. *Developmental Psychology 51,* 1717.

[48] Gunderson, E. A., & Levine, S. C. (2011). Some types of parent number talk count more than others: relations between parents' input and children's cardinal-number knowledge. *Developmental Science 14,* 1021–1032.

[49] Mix, K. S., Sandhofer, C. M., Moore, J. A., & Russell, C. (2012). Acquisition of the cardinal word principle: The role of input. *Early Childhood Research Quarterly 27*, 274–283.

[50] Levine, S. C., Jordan, N. C., & Huttenlocher, J. (1992). Development of calculation abilities in young children. *Journal of Experimental Child Psychology 53*, 72–103.

[51] Klein, J. S., & Bisanz, J. (2000). Preschoolers doing arithmetic: The concepts are willing but the working memory is weak. *Canadian Journal of Experimental Psychology/Revue canadienne de psychologie expérimentale 54*, 105.

[52] Odic, D., Pietroski, P., Hunter, T., Lidz, J., & Halberda, J. (2013). Young children's understanding of "more" and discrimination of number and surface area. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition 39*, 451–461.

[53] Gathercole, S. E., Pickering, S. J., Ambridge, B., & Wearing, H. (2004). The structure of working memory from 4 to 15 years of age. *Developmental Psychology 40*, 177–190.

[54] Cowan, N., & Alloway, T. (2009). Development of working memory in childhood. In M. Courage & N. Cowan, *The development of memory in infancy and childhood* (2nd ed.; pp. 303–342). New York, NY: Psychology Press.

[55] Zur, O., & Gelman, R. (2004). Young children can add and subtract by predicting and checking. *Early Childhood Research Quarterly 19*, 121–137.

[56] Jordan, N. C., Kaplan, D., Ramineni, C., & Locuniak, M. N. (2009). Early math matters: kindergarten number competence and later mathematics outcomes. *Developmental Psychology 45*, 850.

[57] Holloway, I. D., & Ansari, D. (2009). Mapping numerical magnitudes onto symbols: The numerical distance effect and individual differences in children's mathematics achievement. *Journal of Experimental Child Psychology 103*, 17–29.

The California Statewide Early Math Initiative is funded by
the California Department of Education, Early Learning and Care Division and the California State Board of Education.

[58] Spaepen, E., Gunderson, E. A., Gibson, D., Goldin-Meadow, S., & Levine, S. C. (2018). Meaning before order: Cardinal principle knowledge predicts improvement in understanding the successor principle and exact ordering. *Cognition 180*, 59–81.

[59] Sarnecka, B. W., & Wright, C. E. (2013). The idea of an exact number: Children's understanding of cardinality and equinumerosity. *Cognitive Science 37*, 1493–1506.

[60] Canobi, K. H. (2005). Children's profiles of addition and subtraction understanding. *Journal of Experimental Child Psychology 92*, 220–246.

[61] Canobi, K. H., R. A. Reeve, & Pattison, P. E. (1998). The role of conceptual understanding in children's addition problem solving. *Developmental Psychology 34*, 882.

[62] Laski, E. V., Ermakova, A., & Vasilyeva, M. (2014). Early use of decomposition for addition and its relation to base-10 knowledge. *Journal of Applied Developmental Psychology 35*, 444–454.

[63] Laski, E. V., Schiffman, J., Shen, C., & Vasilyeva, M. (2016). Kindergartners' base-10 knowledge predicts arithmetic accuracy concurrently and longitudinally. *Learning and Individual Differences 50*, 234–239.

[64] Canobi, K. H., Reeve, R. A., & Pattison, P. E. (2003). Patterns of knowledge in children's addition. *Developmental Psychology 39*, 521.

[65] Prather, R. W., & Alibali, M. W. (2009). The development of arithmetic principle knowledge: How do we know what learners know? *Developmental Review 29*, 221–248.

[66] Resnick, L. B. (1992.) From protoquantities to operators: Building mathematical competence on a foundation of everyday knowledge. In G. Leinhardt, R. T. Putnam, & R. A. Hattrup (Eds.), *Analysis of Arithmetic for Mathematics Teaching* (pp. 373–429). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

[67] Baroody, A. J., & Gannon, K. E. (1984). The development of the commutativity principle and economical addition strategies. *Cognition and Instruction 1*, 321–339.

[68] Baroody, A. J., Ginsburg, H. P., & Waxman, B. (1983). Children's use of mathematical structure. *Journal for Research in Mathematics Education 14*(3), 156–168.

[69] Baroody, A. J. (1999). Children's relational knowledge of addition and subtraction. *Cognition and Instruction 17*, 137–175.

[70] Mix, K. S., Prather, R. W., Smith, L. B., & Stockton, J. D. (2014). Young children's interpretation of multidigit number names: From emerging competence to mastery. *Child Development 85*, 1306–1319.

71 Miura, I. T. (1987). Mathematics achievement as a function of language. *Journal of Educational Psychology 79*, 79.

[72] Miura, I. T., Okamoto, Y., Kim, C. C., Steere, M., & Fayol, M. (1993). First graders' cognitive representation of number and understanding of place value: Cross-national comparisons: France, Japan, Korea, Sweden, and the United States. *Journal of Educational Psychology 85*, 24.

[73] Saxton, M., & Towse, J. N. (1998). Linguistic relativity: The case of place value in multi-digit numbers. *Journal of Experimental Child Psychology 69*, 66–79.

[74] Carr, M., & Alexeev, N. (2011). Fluency, accuracy, and gender predict developmental trajectories of arithmetic strategies. *Journal of Educational Psychology 103*, 617–631.

[75] Laski, E. V., Casey, B. M., Yu, Q., Dulaney, A., Heyman, M., & Dearing, E. (2013). Spatial skills as a predictor of first grade girls' use of higher level arithmetic strategies. *Learning and Individual Differences 23*, 123–130.

[76] Laski, E. V., Schiffman, J., Vasilyeva, M., & Ermakova, A. (2016). *Arithmetic accuracy in children from high-and low-income schools: What do strategies have to do with it?* AERA Open 2, 2332858416644219.

[77] Siegler, R. S., & Shrager, J. (1984). Strategy choices in addition and subtraction: How do children know what to do? In C. M. Sophian (Ed.), *Origins of cognitive skills* (pp. 229–293). Erlbaum.

[78] Geary, D. C., Hoard, M. K., Nugent, L., & Bailey, D. H. (2012). Mathematical cognition deficits in children with learning disabilities and persistent low achievement: A five-year prospective study. *Journal of Educational Psychology 104*, 206.

[79] Siegler, R. S. (1996). *Emerging minds: The process of change in children's thinking.* Oxford, UK: Oxford University Press.

[80] Foley, A. E., Vasilyeva, M., & Laski, E. V. (2017). Children's use of decomposition strategies mediates the visuospatial memory and arithmetic accuracy relation. *British Journal of Developmental Psychology 35,* 303–309.

[81] Geary, D. C., Hoard, M. K., Byrd-Craven, J., & DeSoto, M. C. (2004). Strategy choices in simple and complex addition: Contributions of working memory and counting knowledge for children with mathematical disability. *Journal of Experimental Child Psychology 88*, 121–151.

[82] Shrager, J., & Siegler, R. S. (1998). SCADS: A Model of Children's Strategy Choices and Strategy Discoveries. *Psychological Science 9*, 405–410.

[83] Hegarty, M., Mayer, R. E., & Monk, C. A. (1995). Comprehension of arithmetic word problems: A comparison of successful and unsuccessful problem solvers. *Journal of Educational Psychology 87*, 18.

[84] Gick, M. L., & Holyoak, K. J. (1983). Schema induction and analogical transfer. *Cognitive Psychology 15*, 1–38.

[85] Briars, D. J., & Larkin, J. H. (1984). An integrated model of skill in solving elementary word problems. *Cognition and Instruction 1*, 245–296.

[86] Carpenter, T. P., Hiebert, J., & Moser, J. M. (1983). The effect of instruction on children's solutions of addition and subtraction word problems. *Educational Studies in Mathematics 14*, 55–72.

The California Statewide Early Math Initiative is funded by
the California Department of Education, Early Learning and Care Division and the California State Board of Education.

[87] Fuchs, L. S., Powell, S. R., Cirino, P. T., Schumacher, R. F., Marrin, S., Hamlett, C. L., … Changas, P. C. (2014). Does calculation or word-problem instruction provide a stronger route to prealgebraic knowledge? *Journal of Educational Psychology 106*, 990.

[88] Jitendra, A. K., Sczesniak, E., Griffin, C. C., & Deatline-Buchman, A. (2007). Mathematical word problem solving in third-grade classrooms. *The Journal of Educational Research 100*, 283–302.

[89] Montague, M. (2008). Self-regulation strategies to improve mathematical problem solving for students with learning disabilities. *Learning Disability Quarterly 31*, 37–44.

[90] Case, L. P., Harris, K. R., & Graham, S. (1992). Improving the mathematical problem-solving skills of students with learning disabilities: Self-regulated strategy development. *The Journal of Special Education 26*, 1–19.

[91] Xin, Y. P., & Zhang, D. (2009). Exploring a conceptual model-based approach to teaching situated word problems. *The Journal of Educational Research 102,* 427–442.

[92] Purpura, D. J., Baroody, A. J., Eiland, M. D., & Reid, E. E. (2016). Fostering first graders' reasoning strategies with basic sums: the value of guided instruction. *The Elementary School Journal 117,* 72–100.

[93] Torbeyns, J., Verschaffel, L. & Ghesquiere, P. (2005). Simple addition strategies in a first-grade class with multiple strategy instruction. *Cognition and Instruction 23*, 1–21.

[94] Laski, E. V., & Siegler, R. S. (2014). Learning from number board games: You learn what you encode. *Developmental Psychology 50*, 853.

[95] Schiffman, J., & Laski, E. V. (2018). Materials count: Linear-spatial materials improve young children's addition strategies and accuracy, irregular arrays don't. *PloS one 13*, e0208832.

[96] Fuchs, L. S., Powell, S. R., Seethaler, P. M., Cirino, P. T., Fletcher, J. M., Fuchs, D., & Hamlett, C. L. (2010). The effects of strategic counting instruction, with and without deliberate practice, on number combination skill among students with mathematics difficulties. *Learning and Individual Differences 20,* 89–100.

[97] Powell, S. R., & Fuchs, L. S. (2018). Effective word-problem instruction: Using schemas to facilitate mathematical reasoning. *Teaching Exceptional Children 51*, 31–42.

[98] Jitendra, A. K., & Star, J. R. (2012). An exploratory study contrasting high-and low-achieving students' percent word problem solving. *Learning and Individual Differences 22*, 151–158.

[99] Powell, S. R. (2011). Solving word problems using schemas: A review of the literature. *Learning Disabilities Research & Practice 26*, 94–108.

[100] Geary, D. C. (2006). Development of mathematical understanding. In D. Kuhl & R. Siegler (Eds.), *Handbook of child psychology* (6th ed., Vol. 2). John Wiley & Sons.

[101] California Department of Education. (2010). *Fundamentos del aprendizaje y el desarrollo infantil de California.* Sacramento, CA: California Department of Education.

[102] California Department of Education. (2014). *Fundamentos del aprendizaje prescolar de California.* Sacramento, CA: California Department of Education.

[103] San Diego County Office of Education. (2012). *Estándares estatales comunes de matemáticas para el estado de California.* San Diego, CA: San Diego County Office of Education.

The California Statewide Early Math Initiative is funded by
the California Department of Education, Early Learning and Care Division and the California State Board of Education.